Л. Н. Васильева, В. П. Микка

Йошкар-Ола, mikkav@marsu.ru

О p-ЛИСТНЫХ ВЫПУКЛЫХ РЕГУЛЯРНЫХ ФУНКЦИЯХ ИЗ СЕМЕЙСТВА ТИПА БЕККЕРА

В монографии [1] обосновано неулучшаемое достаточное условие p-листности регулярных в $E = \{\zeta : |\zeta| < 1\}$ функций в виде ограничения

$$A_1(p) = \Big\{ f(\zeta) = a_p\zeta^p + a_{p+1}\zeta^{p+1} + a_{p+2}\zeta^{p+2} + \dots : \\ \left|\zeta\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)} + 1 - p\right| \leqslant \frac{p}{1-|\zeta|^{2p}}\Big\}.$$

Очевидно, $A_1(1)$ совпадает с условием однолистности Беккера [2].

Рассмотрим задачу выделения подклассов

$$S^0_{p,n;\alpha,\beta} = \Big\{ f_{p,n}(\zeta) = a_p\zeta^p + a_{p+n}\zeta^{p+n} + a_{p+n+1}\zeta^{p+n+1} + \dots : \\ \zeta\frac{f''_{p,n}(\zeta)}{f'_{p,n}(\zeta)} + 1 \prec p\frac{1+\beta\zeta}{1-\alpha\zeta}\Big\},$$

принадлежащих $A_1(p)$. Здесь $\alpha + i\beta \in \Delta = \{(\alpha,\beta) \in (-1,1] \times \times (-1,1] : \alpha+\beta > 0\}$.

Теорема. *Функции $f_{p,n}(\zeta)$ из $S^0_{p,n;\alpha,\beta}$ принадлежат $A_1(p)$, если*

$$\alpha + i\beta \in \nabla^1_{p,n} = \Big\{(\alpha,\beta) \in \Delta : \\ (\alpha+\beta)\frac{r^n(1-r^{2p})}{1-\alpha r^n} = (\alpha+\beta)\frac{2p}{n}r^{2p+n} \leqslant 1\Big\},$$

где $r = r(\alpha) \in [0,1)$ является единственным корнем уравнения

$$2p\alpha r^{2p+n} - (n+2p)r^{2p} + n = 0.$$

Выпуклые множества $\nabla^1_{p,n}$ нельзя расширить из-за экстремальных функций

$$f_{p,n}(\zeta) = pa_p \int \zeta^{p-1}(1-\alpha\zeta^n)^{-\frac{p(\alpha+\beta)}{\alpha n}}\, d\zeta.$$

Укажем явные уравнения границы $\partial\nabla^1_{p,n}$.

Следствие. *Если $1 \leqslant n < 4p$, то граница выпуклых множеств $\nabla^1_{p,n}$ состоит из отрезков $[1+(n/2p-1)i, 1-i)$, $(1-i,-1+i)$, $(-1+i,\alpha_{1;p,n}+i]$ и выпуклой, монотонно убывающей по α кривой*

$$L^+_{p,n;\alpha,\beta} = \Big\{(\alpha,\beta)\in(-1,1]\times(-1,1]: \\ \frac{n+2p}{n}\Big(\frac{n}{2p(\alpha+\beta)}\Big)^{\frac{2p}{2p+n}} - \frac{2\alpha+\beta}{\alpha+\beta} = 0,\ \alpha\in[\alpha_{1;p,n},1]\Big\},$$

где $\alpha_{1;p,n}+i$ определяется как единственная точка пересечения кривой $L^+_{p,n;\alpha,\beta}$ с прямой $\beta = 1$. Если $n \geqslant 4p$, то $\nabla^1_{p,n} = \Delta$, т. е. все выпуклые p-листные регулярные функции $f_{p,n}(\zeta)$ принадлежат семейству $A_1(p)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Авхадиев Ф. Г. *Конформные отображения и краевые задачи.* – Казань: Казанский фонд "Математика", 1996. – 216 с.

2. Becker J. *Löwnersche Differentialgleichung und quasikonform fortsetzbare schlichte Funktionen* // J. Reine und Angew. Math. – 1972. – Bd. 255. – S. 23–43.